NH
ELSEVIER

Journal of Geometry and Physics 14 (1994) 309–331

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Déformations covariantes sur les orbites polarisées d'un groupe de Lie

Didier Arnal, Jean Ludwig, Mohsen Masmoudi
Université de Metz, Département de Mathématiques, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France

Reçu le 19 juillet 1993

Abstract

We prove the existence of covariant star-products on the orbits of the coadjoint representation of a Lie group which admits polarisations.

Résumé

On démontre l'existence de produits-star covariants sur les orbites de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie qui admettent des polarisations.

Keywords: Covariant deformations, polarised orbits, Lie groups
1991 MSC: 22 E 30, 22 E 70, 58 H 15, 14 D 15

0. Introduction

Les produits-star (déformations formelles associatives et pilotées par le crochet de Poisson des fonctions C^∞ sur une variété symplectique) ont été introduits dans [1] par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer comme un procédé natural et nouveau de quantification géométrique.

L'application de cette théorie à la recherche de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie G au moyen de la quantification de ses orbites coadjointes O a été proposée par C. Fronsdal dans [2] et plusieurs auteurs ont développé cette théorie pour des classes particulières de groupes de Lie (nilpotents, exponentiels, compacts, et, dans le cas semi-simple, les orbites correspondantes à la série principale unitaire et la série discrète holomorphe [3–5]). Puisque le nouveau produit sur $C^\infty(O)$ correspond à la composition des opérateurs, on demande toujours qu'il satisfasse la condition de "covariance" suivante:

SSDI 0393-0440(93)E0058-W

$$\frac{1}{2\nu}(\tilde{X}\star\tilde{Y}-\tilde{Y}\star\tilde{X})=[\tilde{X},Y]=\{\tilde{X},\tilde{Y}\}, \tag{1}$$

pour tout X et Y de $\mathfrak{g}$. Ici $\tilde{X}$ représente la fonction "coordonnée" $\xi\mapsto\langle\xi, X\rangle$ sur O. On obtient en effet alors une représentation naturelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G en des dérivations de $(C^\infty(O), \star)$. Si G est connexe et simplement connexe, on peut exponentier cette représentation en une représentation de G en des automorphismes de $(C^\infty(O), *)$ qui est une déformation de l'action géométrique de G.

On sait depuis [6] que n'importe quelle variété symplectique admet des produits-star. La question de savoir si on peut définir sur n'importante quelle orbite coadjointe O de G un produit-star covariant [c'est à dire vérifiant (1)] reste cependant ouverte. Nous avons prouvé dans un article récent [7] que ceci était possible si O admettait une polarisation réelle (invariante sous l'action du stabilisateur du point considéré). Le but de ce papier est de prouver qu'un tel produit-star existe dès que O admet une polarisation (complexe ou réelle).

Pour ceci, nous avons suivi notre méthode de construction de [7]. La "partie complexe" de la polarisation fait apparaître une décomposition de l'orbite déjà remarquée par Pukanszky [8] dans le cas résoluble et les auteurs de [9]. On voit entr'autres apparaître un fibré natural avec des fibres kaehlériennes. Nous avons besoin de la construction d'un produit-star sur des cartes de ces fibres qui remplace le produit-star de Moyal sur les cartes canoniques dans le cas réel et qui a les propriétés demandées vis à vis les fonctions $\tilde{X}$. Ce produit-star s'obtient grâce à une paramétrisation précise du fibré suivant les idées de Pukanszky. Notre démonstration établit aussi l'existence de produits-star "naturals" sur les variétés kaehlériennes.

1. Généralités

Soit G un groupe de Lie réel connexe et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Notons par $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}^*$ par la représentation coadjointe

$$G\times\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*, \quad (g,\xi)\mapsto g\cdot\xi=\xi\circ\mathrm{Ad}(g^{-1}).$$

$\mathfrak{g}^*$ est munie d'une structure de Poisson par la donnée du 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ défini par

$$\Lambda_\xi(X,Y)=\langle\xi,[X,Y]\rangle, \quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}^{**}, \quad \forall\xi\in\mathfrak{g}^*.$$

Soit $O_{\xi_0}=G/G_{\xi_0}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ (G_{ξ_0} est le stabilisateur de ξ_0 dans G). La 2-forme ω déduite de la restriction de Λ définit sur O_{ξ_0} une structure de variété symplectique:

$$\omega(X^*,Y^*)(\xi)=\langle\xi,[X,Y]\rangle, \qquad \forall X,Y\in\mathfrak{g}, \quad \forall\xi\in O_{\xi_0},$$

où X^* est le champ de vecteur fondamental associé à X défini par:

$$X^*(\xi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(-tX\cdot\xi)\,|_{t=0}=\xi\circ\mathrm{ad}(X)\ .$$

Définition [1,10].

(i) Un produit-star sur O_{ξ_0} est une déformation [11] de l'algèbre associative $C^\infty(O_{\xi_0})$, c'est à dire une application bilinéaire:

$$C^\infty(O_{\xi_0})\times C^\infty(O_{\xi_0})\to C^\infty(O_{\xi_0})[[\nu]]\ ,$$
$$(u,v\mapsto u\star v=\sum_{r\geqslant 0}\nu^r C_r(u,v)\ ,$$

où $C^\infty(O_{\xi_0})[[\nu]]$ est l'espace des séries formelles en ν à coefficients dans $C^\infty(O_{\xi_0})$, telle que les C_r soient des opérateurs bidifférentiels vérifiants:

(1) $C_0(u,v)=uv\ ,\qquad C_1(u,v)=\{u,v\}\ ,$

(2) $C_r(u,v)=(-1)^r C_r(v,u)\ ,$

(3) $C_r(1,u)=0\ ,\quad \forall r>0\ ,$

(4) $\sum_{r+s=t} C_r(C_s(u,v),w)=\sum_{r+s=t} C_r(u,C_s(v,w))\ ,\quad \forall t\geqslant 0\ .$

(ii) Un produit-star sur O_{ξ_0} est dit covariant si et seulement si, pour tout X, Y dans $\mathfrak{g}$,

$$\frac{1}{2\nu}(\tilde{X}_*\tilde{Y}-\tilde{Y}_*\tilde{X})=\widetilde{[X,Y]}=(\{\tilde{X},\tilde{Y}\}=\Lambda(\mathrm{d}\tilde{X},\mathrm{d}\tilde{Y}))\ ,$$

où $\tilde{X}$ est l'élément de $C^\infty(O_{\xi_0})$ défini par

$$\tilde{X}(\xi)=\langle\xi,X\rangle\ ,\quad \forall\xi\in O_{\xi_0}\ .$$

A tout u dans $C^\infty(O_{\xi_0})$, on associe le champ de vecteur hamiltonien H_u défini par:

$$\mathrm{i}(H_u)\omega=-\mathrm{d}u\ .$$

Il est bien connu [12] ou [9] par exemple) que $u\mapsto H_u$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie, et que pour tout X dans $\mathfrak{g}$ on a:

$$H_{\tilde{X}}=X^*\ .$$

Dans la suite, on note par $H(O_{\xi_0})$ l'espace des champs de vecteur sur O_{ξ_0}.

1.1. Polarisation

Soit $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\oplus i\mathfrak{g} .$$

On note par – la conjugaison:

$$-:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \quad X+iY\mapsto X-iY .$$

L'action adjointe peut être étendue à $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ par $\mathbb{C}$-linéarité.

Considérons la 2-forme B_{ξ_0} définie par:

$$B_{\xi_0}(X, Y)=\langle \xi_0, [X, Y]\rangle , \quad \forall X, Y\in\mathfrak{g} .$$

Pour tout sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ on note $\mathfrak{a}^{\perp}$ le sous-espace ortogonal de $\mathfrak{a}$ pour la 2-forme B_{ξ_0}:

$$\mathfrak{a}^{\perp}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\forall Y\in\mathfrak{a}, \xi_0([X, Y])=0\} .$$

Cette notion peut etre étendue aux sous-espaces de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^{\perp}=\{X+iY\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\,|\,\forall X'+iY'\in\mathfrak{a}, &\ \xi_0([X+iY, X'+iY'])\\ &=\xi_0([X, X']-[Y, Y'])+i\xi_0([X, Y']+[Y, X'])=0\} .\end{aligned}$$

Lemme 1.1. *Si on note par $\mathfrak{g}_{\xi_0}$ l'algèbre de Lie de G_{ξ_0} alors*

(i) $\mathfrak{g}^{\perp}=\mathfrak{g}_{\xi_0}$,

(ii) pour tout sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}_{\xi_0}$ on a:

$$(\mathfrak{a}^{\perp})^{\perp}=\mathfrak{a} , \quad \mathfrak{g}_{\xi_0}\subset\mathfrak{a}^{\perp} , \quad \dim\mathfrak{a}+\dim\mathfrak{a}^{\perp}=\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}_{\xi_0} .$$

Définition [3]. Une polarisation en ξ_0 est une sous-algèbre de Lie complexe $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ contenant $\mathfrak{g}_{\xi_0}\oplus i\mathfrak{g}_{\xi_0}$ et vérifiant:

(i) $\mathfrak{h}$ est invariante sous l'action adjointe de G_{ξ_0},

(ii) $\mathfrak{h}^{\perp}=\mathfrak{h}$,

(iii) $\mathfrak{h}+\bar{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Remarques.

(1) La condition (ii) est équivalente aux deux conditions suivantes:

(iia) $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}=\frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}+\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}_{\xi_0})$,

(iib) $\xi_0([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])=0$.

(2) Soit $\xi=g\cdot\xi_0$ un élément de O_{ξ_0}; alors, puisque $\mathfrak{h}$ est Ad G_{ξ_0}-invariante, $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ qui ne dépend que de ξ:

$$\mathrm{Ad}(gh)(\mathfrak{h})=\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{Ad}(h)(\mathfrak{h}))=\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) , \quad \forall h\in G_{\xi_0} .$$

Il est clair que $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h})$ est une polarisation en ξ.

(3) Il est bien connu [13] qu'une telle sous-algèbre $\mathfrak{h}$ n'existe pas toujours.

Dans toute la suite on suppose que l'orbite O_{ξ_0} admet une polarisation $\mathfrak{h}$ en ξ_0. On associe à $\mathfrak{h}$ deux sous-algèbres réelles de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ définies par:

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\cap\bar{\mathfrak{h}}\cap\mathfrak{g}\,,\qquad \mathfrak{e}=(\mathfrak{h}+\bar{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{g}\,.$$

Soient D_0 le sous-groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$ et E_0 celui d'algèbre de Lie $\mathfrak{e}$. On pose:

$$D=G_{\xi_0}\cdot D_0\,,\qquad E=G_{\xi_0}\cdot E_0\,.$$

On a alors les lemmes suivants:

Lemme 1.2 [3].
(i) $\mathfrak{d}^{\perp}=\mathfrak{e}$.
(ii) D_0 et D sont deux sous-groupes de Lie fermés de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$.
(iii) Si E est un sous-groupe de Lie de G alors son algèbre de Lie est $\mathfrak{e}$.

Lemme 1.3 [3]. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $D\cdot\xi_0$ est un fermé de $\mathfrak{g}^*$;
(ii) $D\cdot\xi_0\simeq\xi_0+\mathfrak{e}^0$ *où* $\mathfrak{e}^0=\{\xi\in\mathfrak{g}^*\mid\langle\xi,\mathfrak{e}\rangle=0\}$.

Dans toute la suite, on suppose que E est un sous-groupe fermé de G. Donc d'après [14] (p. 105, Th. 2–3) il existe une unique structure analytique sur E telle que E soit un sous-groupe de Lie de G. Dans ce cas, vu que $D\subset E$ et que D est sous-groupe fermé de G, E/D sera un espace homogène.

1.2. Fonctions polarisables

Il est bien clair que si $X+\mathrm{i}Y\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ alors:

$$(X+\mathrm{i}Y)^*(\xi)=X^*(\xi)+\mathrm{i}Y^*(\xi)\in(T_\xi O_{\xi_0})^{\mathbb{C}}\,,\quad\forall\xi\in O_{\xi_0}\,.$$

Considérons la polarisation géométrique complexe F de la variété symplectique (O_{ξ_0},ω) définie de la manière suivante:

$$\begin{aligned}F_{\xi_0}&=\{X^*(\xi_0)=X^*_{\xi_0}\,,\quad X\in\mathfrak{h}\}\\ F_\xi=F_{g\cdot\xi_0}=g\cdot F_{\xi_0}&=\{X^*(\xi)=X^*_\xi,\,X\in\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h})\}\\ &=\{(\mathrm{Ad}(g)X)^*(\xi)\,,\quad X\in\mathfrak{h}\}\,.\end{aligned}$$

Remarquons que cette polarisation est bien définie car $\mathfrak{h}$ est G_{ξ_0}-invariante et qu'elle est analytique car l'action adjointe est analytique. Enfin cette polarisation est G-invariante par construction.

On désigne par $H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}}$ l'espace des champs de vecteurs complexes sur O_{ξ_0}:

$$H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}} = H(O_{\xi_0}) + \mathrm{i}H(O_{\xi_0}) \ .$$

Définissons comme dans [12] les deux sous-espaces vectoriels de $H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}}$:

$$\nu_F^0(O_{\xi_0}) = \{X \in H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}} \mid X(\xi) \in F_\xi,\ \forall \xi \in O_{\xi_0}\} \ ,$$

$$\nu_F^1(O_{\xi_0}) = \{X \in H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}} \mid [X, \nu_F^0(O_{\xi_0})] \subset \nu_F^0(O_{\xi_0})\} \ .$$

Lemme 1.4.

$$\nu_F^0(O_{\xi_0}) = \{X \in H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}} \mid \forall Y \in \nu_F^0(O_{\xi_0}),\ \omega(X, Y) = 0\} \ .$$

Démonstration. Soit X dans $H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}}$ tel que pour tout Y de $\nu_F^0(O_{\xi_0})$, $\omega(X, Y) = 0$. Soit $\xi = g \cdot \xi_0$ un élément de O_{ξ_0} et soit Z un élément de $\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{h})$. Puisque la polarisation géométrique F est analytique, il existe Y dans $\nu_F^0(O_{\xi_0})$ tel que $Y(\xi) = Z^*(\xi)$. On a donc:

$$\omega_\xi(X(\xi), Z^*(\xi)) = \omega_\xi(X(\xi), Y(\xi)) = 0 \ .$$

Ceci étant vrai pour tous les Z dans la polarisation en ξ $\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{h})$, $X(\xi)$ appartient à F_ξ.

Inversement, il est clair que si X est dans $\nu_F^0(O_{\xi_0})$ et Y est dans $\nu_F^0(O_{\xi_0})$ alors $\omega(X, Y) = 0$.

Lemme 1.5.

$$[\nu_F^1(O_{\xi_0}), \nu_F^1(O_{\xi_0})] \subset \nu_F^1(O_{\xi_0}) \ .$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe de l'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Lie.

Remarqons que $\nu_F^1(O_{\xi_0})$ est le normalisateur de $\nu_F^0(O_{\xi_0})$ dans l'algèbre de Lie $H(O_{\xi_0})_{\mathbb{C}}$.

Définissons comme dans [12] les deux sous-espaces vectoriels de $C^\infty(O_{\xi_0})$:

$$\mathscr{E}_F^0(O_{\xi_0}) = \{f \in C^\infty(O_{\xi_0}) \mid H_f \in \nu_F^0(O_{\xi_0})\} \ ,$$

$$\mathscr{E}_F^1(O_{\xi_0}) = \{f \in C^\infty(O_{\xi_0}) \mid H_f \in \nu_F^1(O_{\xi_0})\} \ .$$

Si U est un ouvert de O_{ξ_0} on définera de la même manière $\nu_F^0(U)$, $\nu_F^1(U)$, $\mathscr{E}_F^0(U)$, $\mathscr{E}_F^1(U)$.

L'application $f \mapsto H_f$ étant un homomorphisme d'algèbre de Lie, $\mathscr{E}_F^1(O_{\xi_0})$ est le normalisateur de $\mathscr{E}_F^0(O_{\xi_0})$ pour le crochet de Poisson.

De même il est clair que d'après le lemme 1.4:

$$\{f, g\} = 0 \ , \quad \forall f, g \in \mathscr{E}_F^0(O_{\xi_0}) \ .$$

Lemme 1.6.

$$\mathscr{E}^0_F(O_{\xi_0}) = \{f \in C^\infty(O_{\xi_0}) \mid X(f) = 0,\ \forall X \in \nu^0_F(O_{\xi_0})\} .$$

Démonstration. D'après le lemme 1.4 on a l'équivalence:

$$f \in \mathscr{E}^0_F(O_{\xi_0}) \Leftrightarrow \mathrm{d}f(X) = \omega(X, H_f) = 0,\ \forall X \in \nu^0_F(O_{\xi_0}) .$$ □

Lemme 1.7. *Soit f un élément de $\mathscr{E}^0_F(O_{\xi_0})$ alors:*

$$f(gh \cdot \xi_0) = f(g \cdot \xi_0) , \quad \forall g \in G, \forall h \in D .$$

Démonstration. Soit X un champ de vecteur sur O_{ξ_0} vérifiant:

$$\forall \xi = g \cdot \xi_0 \in O_{\xi_0} , \quad \exists Y \in \mathfrak{d} \mid X(\xi) = (\mathrm{Ad}_g(Y))^*(\xi) .$$

Un tel champ de vecteur est dans $\nu^0_F(O_{\xi_0})$. On a donc:

$$X(f) = 0 .$$

Donc, pour Y fixé dans $\mathfrak{d}$,

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) f(g \exp tY \cdot \xi_0)\,|_{t=0} = 0$$

et $f(gh \cdot \xi_0) = f(g \cdot \xi_0)$ pour tout h de D_0 donc bien sûr pour tout h de D. □

1.3. Structure de variété kaehlérienne sur E/D

Définition 1.8. Un espace vectoriel kaehlérien V est un espace vectoriel symplectique (V, ω) muni d'une structure complexe J telle que $J \in SP(V)$:

$$\omega(J(u), J(v)) = \omega(u, v) , \quad \forall u, v \in V .$$

Sur un espace kaehlérien, on peut définir une forme bilinéaire réelle b par:

$$b(u, v) = \omega(u, J(v)) , \quad \forall u, v \in V .$$

Cette forme est symétrique, non singulière et J-invariante:

$$b(u, v) = b(J(u), J(v)) , \quad \forall u, v \in V .$$

Définition 1.9. Une structure kaehlérienne sur (V, ω) est dite positive si et seulement si b est définie positive.

Définition 1.10. Soit M une variété complexe munie d'une 2-forme symplectique

ω, alors M est dite kaehlérienne si et seulement si pour tout x dans M, la 2-forme ω_x et la structure complexe déduite de celle de M définissent sur T_xM une structure d'espace vectoriel kaehlérien.

Une variété kaehlérienne M est dite positive si et seulement si pour tout x dans M la structure kaehlérienne sur T_xM est positive.

Puisque $\mathfrak{d}^\perp = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$ peut être vu comme l'algèbre de Lie du stabilisateur de la restriction η_0 de ξ_0 à $\mathfrak{e}$ pour l'action coadjointe de E et par suite E/D sera l'orbite de η_0 sous l'action de E dans $\mathfrak{e}^*$. Elle est donc munie d'une structure de variété symplectique canonique. Dans la suite on note ω_0 la 2-forme définie sur E/D.

Si on note toujours par X^* $(X\in\mathfrak{e})$ le champ de vecteur sur E/D défini par:

$$X^*(\eta) = \eta\circ \mathrm{ad}\, X\,, \quad \forall \eta = e\cdot\eta_0 \in E/D\,,$$

où ad X est la restriction de ad X à $\mathfrak{e}$, alors on a:

$$\omega_0(X^*, Y^*)(\eta) = \langle \eta, [X, Y]\rangle\ .$$

Remarquons que, si X est un élément de $\mathfrak{e}$, alors on a:

$$X^*(\eta_0) = 0 \Leftrightarrow X \in \mathfrak{d}\ .$$

Cette variété E/D est munie d'une structure de variété presque complexe E-invariante de la façon suivante:

Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{e}$ supplémentaire de $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{m}\ .$$

Soit X un élément de $\mathfrak{m}$, alors il existe un unique Y dans $\mathfrak{m}$ tel que $X+\mathrm{i}Y$ soit un élément de $\mathfrak{h}$. En effet puisque X est dans $\mathfrak{e}$, il existe Y' dans $\mathfrak{g}$ tel que $X+\mathrm{i}Y'$ soit dans $\mathfrak{h}$. Maintenant si Y'' est un autre élément de $\mathfrak{g}$ tel que $X+\mathrm{i}Y''$ soit dans $\mathfrak{h}$ alors:

$$Y' - Y'' = \frac{1}{\mathrm{i}}\left((X+\mathrm{i}Y') - (X+\mathrm{i}Y'')\right) \in \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g} = \mathfrak{d}\ .$$

Définissons l'application:

$$J_{\eta_0} : T_{\eta_0}E/D \to T_{\eta_0}E/D$$

par

$$J_{\eta_0}(X^*(\eta_0)) = Y^*(\eta_0)\ .$$

Rappelons que $\{X^*(\eta_0),\ X\in\mathfrak{m}\}$ engendre $T_{\eta_0}E/D$. Pour $\eta = e\cdot\eta_0$ $(e\in E)$ l'application J_η est définie sur $T_\eta E/D$ par:

$$J_\eta(e_*\cdot X^*(\eta_0)) = e_*\cdot J_{\eta_0}(X^*(\eta_0))\ .$$

Il est clair que pour tout η dans E/D on a:

$$(J_\eta)^2 = -\mathrm{id}\ .$$

Pour X dans $\mathfrak{m}$ on notera parfois par $J(X)$ l'unique élément de $\mathfrak{m}$ tel que $X + \mathrm{i}J(X)$ soit dans $\mathfrak{h}$.

Le tenseur de torsion N de J est défini à l'origine par: $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} N(X_1^*, X_2^*)(\eta_0) = 2(&[J(X_1^*), J_2^*)] - [X_1^*, X_2^*] \\ &-J([X_1^*, J(X_2^*)]) - J([J(X_1^*), X_2^*]))(\eta_0)\ . \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} [X_1 + \mathrm{i}J(X_1), X_2 + \mathrm{i}J(X_2)] = [X_1, X_2] &- [J(X_1), J(X_2)] \\ &+ \mathrm{i}([J(X_1), X_2] + [X_1, J(X_2)]) \in \mathfrak{h} \end{aligned}$$

et par suite:

$$J([X_1^*, J(X_2^*)] + [J(X_1^*), X_2^*])(\eta_0) = -([X_1^*, X_2^*] - [J(X_1^*), J(X_2^*)])(\eta_0)\ ,$$

et par suite $N \equiv 0$ à l'origine. Vu que N est E-invariant [15, p. 191, prop. 2–3], N est identiquement nul. D'après [15, p. 124, th. 2–5], J définit sur E/D une structure de variété complexe.

Maintenant on a: $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} &\langle \eta_0, [X_1 + \mathrm{i}J(X_1), X_2 + \mathrm{i}J(X_2)] \rangle \\ &\quad = \langle \eta_0, [X_1, X_2] - [J(X_1), J(X_2)] + \mathrm{i}([J(X_1), X_2] + [X_1, J(X_2)]) \rangle = 0\ . \end{aligned}$$

Donc en particulier:

$$\langle \eta_0, [X_1, X_2] \rangle = \langle \eta_0, [J(X_1), J(X_2)] \rangle$$

ou encore:

$$\omega_0(X_1^*, X_2^*)(\eta_0) = \omega_0(J(X_1^*), J(X_2^*))(\eta_0)\ .$$

ω_0 étant E-invariante, $(E/D, \omega_0)$ est une variété kaehliérienne.

Lemme 1.11. *Soit f une fonction C^∞ sur E/D alors f est holomorphe si et seulement si*: $\forall \eta = e \cdot \eta_0 \in E/D$, $\forall X \in \mathfrak{m}$:

$$((\mathrm{Ad}(e)(X))^* + \mathrm{i}(\mathrm{Ad}(e)J(X))^*)(f)(\eta) = 0\ .$$

Démonstration. Soit $(U, z_1, ..., z_s)$ une carte de la variété complexe E/D autour d'un point $\eta = e \cdot \eta_0$. Rappelons que si on pose $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, alors on a:

$$J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j\ , \qquad J(\partial/\partial y_j) = -\partial/\partial x_j\ .$$

Rappelons aussi que l'espace $T_\eta E/D$ est engendré par $\{(\mathrm{Ad}(e)(X))^*(\eta), X \in \mathfrak{m}\}$. Sachant que

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\eta), ..., \frac{\partial}{\partial y_1}(\eta), ..., \frac{\partial}{\partial y_s}(\eta)\right\}$$

est une base de $T_\eta E/D$, il existe une base $\{X_1, ..., X_s, Y_1, ..., Y_s\}$ de $\mathfrak{m}$ telle que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\eta)=(\mathrm{Ad}(e)(X_j))^*(\eta)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y_j}(\eta)=(\mathrm{Ad}(e)(Y_j))^*(\eta)\,.$$

Dans ce cas on a:

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(\eta)=\tfrac{1}{2}((\mathrm{Ad}(e)X_j)^*-\mathrm{i}(\mathrm{Ad}(e)Y_j)^*)(\eta)$$
$$=\tfrac{1}{2}((\mathrm{Ad}(e)X_j)^*-\mathrm{i}(\mathrm{Ad}(e)J(X_j))^*)(\eta)\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(\eta)=\tfrac{1}{2}((\mathrm{Ad}(e)X_j)^*+\mathrm{i}(\mathrm{Ad}(e)Y_j)^*)(\eta)$$
$$=\tfrac{1}{2}((\mathrm{Ad}(e)X_j)^*+\mathrm{i}(\mathrm{Ad}(e)J(X_j))^*)(\eta)\,. \qquad \square$$

2. Parametrisation des orbites de la représentation coadjointe

Il est bien clair que E définit une structure de fibré sur G/D de base G/E et de fibres difféomorphes à E/D. De même D définit une structure de fibré sur O_{ξ_0} de base G/D et de fibres difféomorphes à $D/G_{\xi_0}\simeq D\cdot\xi_0$. On a donc:

$$\Pi_1 : O_{\xi_0}\simeq G/G_{\xi_0}\to G/D\,, \qquad \Pi_2 : G/D\to G/E\,.$$

On pose $\Pi=\Pi_2\circ\Pi_1$.

Remarquons que G/D peut être vue comme une variété de Poisson régulière dont les feuilles symplectiques sont difféomorphes à la variété kaehlérienne E/D et de codimension la dimension de G/E (la codimension de $\mathfrak{e}$ dans $\mathfrak{g}$) [16].

Posons:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{d}\oplus\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{m}'=\mathfrak{e}\oplus\mathfrak{m}'\,.$$

Dans le cas où $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}'$) est non nul, on considère une base $f=\{X_1, ..., X_s, Y_1=J(X_1), ..., Y_s=J(X_s)\}$ de $\mathfrak{m}$ (resp. $f'=\{Z_1, ..., Z_r\}$ de $\mathfrak{m}'$). Posons:

$$O_{f'}=\{\xi=g\cdot\xi_0\in O_{\xi_0}\,|\,f' \text{ soit linéairement indépendant mod } \mathrm{Ag}(g)(\mathfrak{e})\}\,.$$

Remarquons que ceci a un sens car si $\mathfrak{h}$ est G_{ξ_0}-invariante, $\bar{\mathfrak{h}}$ l'est aussi et par suite $\mathfrak{e}$ est G_{ξ_0}-invariante. In n'est pas difficile de prouver que $O_{f'}$ est un ouvert de O_{ξ_0}.

Soit $\xi=g\cdot\xi_0$ un élément de O_{ξ_0}, et sois $\mathfrak{m}_\xi$ un sous-espace vectoriel supplémentaire à $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{d})$ dans $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{e})$:

$$\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{e})=\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{d})\oplus\mathfrak{m}_\xi\,.$$

Il est bien clair qu'on peut définir une application J sur $\mathfrak{m}_\xi$ comme pour $\xi=\xi_0$. De même, il n'est pas difficile de voir que la structure complexe de E/D ne dépend ni du point choisi dans l'orbite ni du choix du supplémentaire $\mathfrak{m}_\xi$.

Lemme 2.1. *Soit f une fonction C^∞ sur O_{ξ_0}, et soit $\xi=g\cdot\xi_0$ un élément de O_{ξ_0}, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $X^*(f)(\xi)=0$, $\forall X\in \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h})$,

(ii) $X^*(f)(\xi)=0$, $\forall X\in \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{d})$ *et* $(X^*+\mathrm{i}(J(X))^*)(f)(\xi)=0$, $\forall X\in\mathfrak{m}_\xi$.

Démonstration. Il suffit de prouver le lemme pour ξ_0. Il est clair que (i)⇒(ii) $(\forall X\in\mathfrak{m},\, X+\mathrm{i}J(X)\in\mathfrak{h})$.

Maintenant soit $X+\mathrm{i}Y$ un élément de $\mathfrak{h}$, alors X est dans $\mathfrak{e}$ et par suite $X=X_1+X_2$ avec X_1 dans $\mathfrak{d}$ et X_2 dans $\mathfrak{m}$. On a donc:

$$\begin{aligned}&(X+\mathrm{i}Y)^*(f)(\xi_0)\\&\quad=(X_1^*+X_2^*+\mathrm{i}J(X_2)^*+\mathrm{i}(Y-J(X_2))^*)(f)(\xi_0)\\&\quad=X_1^*(f)(\xi_0)+(X_2^*+\mathrm{i}J(X_2)^*)(f)(\xi_0)+\mathrm{i}(Y^*-J(X_2)^*)(f)(\xi_0)\\&\quad=0\,,\end{aligned}$$

car par définition de J, $Y-J(X_2)$ est dans $\mathfrak{d}$. □

Lemme 2.2. *$\mathscr{E}_F^0(O_{\xi_0})$ est l'ensemble des fonctions f qui sont de la forme:*

$$f=\Pi_1^*(\varphi)$$

où φ est une fonction C^∞ sur E/D telle que sa restriction à chaque fibre E/D est holomorphe.

Démonstration. Ce lemme est une conséquence directe des lemmes 2.1, 1.7 et 1.11. □

Lemme 2.3. *Soit $\xi=g\cdot\xi_0$ un élément de $O_{f'}$, alors tout élément X de $\mathfrak{g}$ s'écrit d'une façon unique:*

$$X=\sum_{i=1}^{r}a_{X,i}(\xi)Z_i+X(\xi)$$

où $X(\xi)$ appartient à $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{e})$ et $a_{X,i}(\xi)$ à $\mathbb{R}$. De plus les $a_{X,i}$ et l'application $\xi\mapsto X(\xi)$ sont C^∞ et vérifient:

$$a_{X,i}(gh\cdot\xi_0)=a_{X,i}(g\cdot\xi_0)\,,\quad \forall h\in E,\ \forall i\in\{1,\ldots,r\}\,,$$

$$X(gh\cdot\xi_0)=X(g\cdot\xi_0)\,,\quad \forall h\in E\,.$$

(Il sont donc dans $\mathscr{E}_F^0(O_{f'})$.)

Démonstration. Il est clair que X s'écrit d'une façon unique sous la forme:

$$X = \sum_{i=1}^{r} a_{X,i}(\xi) Z_i + X(\xi) .$$

Mais puisque pour tout h dans E, $\mathrm{Ad}(gh)(\mathfrak{e}) = \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{e})$ alors:

$$a_{X,i}(gh\cdot\xi_0) = a_{X,i}(g\cdot\xi_0) , \quad \forall h\in E, \forall i\in\{1, ..., r\} ,$$

$$X(gh\cdot\xi_0) = X(g\cdot\xi_0) , \quad \forall h\in E .$$

Le fait que les $a_{X,i}$ sont C^∞ se démontre d'une façon analogue à celle du cas réel [12]. □

Lemme 2.4. *Soit $(G/D)_{f'}$ l'image de $O_{f'}$ par Π_1 alors:*

$$\Phi: O_{f'} \to \mathbb{R}^r \times (G/D)_{f'} ,$$

$$\xi \mapsto (\langle \xi, Z_1 \rangle, ..., \langle \xi, Z_r \rangle, \Pi_1(\xi))$$

est un difféomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^r \times (G/D)_{f'}$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est analogue à celle du cas réel [12]. □

Lemme 2.5. *Il existe un ouvert V de G/D autour de $1\cdot D$ et un système de coordonnées $(q'_1, ..., q'_r, z'_1, ..., z'_s)$ (les q'_i appartiennent à $\mathbb{R}$, les z'_j à $\mathbb{C}$) tel que les q'_i soient les variables transverses de la variété de Poisson régulière G/D et la 2-forme ω_0 sur la projection de V sur chaque feuille symplectique s'écrive:*

$$\omega_0 = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k,j} \frac{\partial F}{\partial z'_k \partial \overline{z'_j}} \, \mathrm{d}z'_k \wedge \mathrm{d}\overline{z'_j}$$

où F est une fonction réelle qui ne dépend que des z'_j, $\overline{z'_j}$ (pas des q'_i).

Démonstration. Considérons un voisinage de 1 (élément identité de G) dans G de la forme $\exp V_3 \exp V_2 \exp V_1$, où V_1 est un voisinage de zéro dans $\mathfrak{d}$ tel que exp soit un difféomorphisme de V_1 dans un voisinage de 1 dans D, V_2 est un voisinage de zéro dans $\mathfrak{m}$ tel que $(X, Y) \mapsto \exp X \cdot \exp Y$ soit un difféomorphisme de $V_2 \times V_1$ dans un voisinage de 1 dans E, et V_3 un voisinage de zéro dans $\mathfrak{m}'$ tel que $(X, Y, Z) \mapsto \exp X \cdot \exp Y \cdot \exp Z$ soit un difféomorphisme. Trivialisons alors le fibré $\Pi_2 : G/D \to G/E$ au voisinage de $1 \cdot D$ de la façon suivante:

$$G/E \times E/D \to G/D ,$$

$$(\exp Y\cdot E, \exp X\cdot D) \mapsto \exp Y \exp X\cdot D , \quad Y \in V_3, X \in V_2 .$$

D'après [15] quitte a prendre V_2 plus petit il existe une carte de E/D autour de $e\cdot D$, $(\exp V_2 \cdot D, z'_1, ..., z'_s)$ telle que ω_0 soit de la forme:

$$\omega_0 = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k,j} \frac{\partial F}{\partial z'_k \partial \overline{z'_j}} \mathrm{d}z'_k \wedge \mathrm{d}\overline{z'_j}$$

où F est une fonction réelle. Maintenant il suffit de considérer la carte (exp V_3 exp $V_2 \cdot D$, Ψ) où Ψ est la fonction définie par:

$$\Psi(\exp(q'_1 Z_1 + \cdots + q'_r Z_r) \exp X \cdot D)$$
$$= (q'_1, ..., q'_r, z'_1 (\exp X \cdot D), ..., z'_s(\exp X \cdot D)) . \qquad \square$$

Soit $(V, q'_1, ..., q'_r, z'_1, ..., z'_s)$ une carte de G/D comme dans le lemme précédent telle que $U = \Pi_1^{-1}(V) \subset O_{f'}$. On définit des nouvelles fonctions t_i, q_i, z_j sur U par: $\forall \xi \in U$

$$t_i(\xi) = \langle \xi, Z_i \rangle , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r ,$$

$$q_i(\xi) = q'_1(\Pi_1(\xi)) , \quad 1 \leqslant i \leqslant r ,$$

$$z_i(\xi) = z'_j(\Pi_1(\xi)) , \quad 1 \leqslant j \leqslant s .$$

On posera parfois $t = (t_1, ..., t_r)$, $q = (q_1, ..., q_r)$ et $z = (z_1, ..., z_s)$.

Lemme 2.6. (U, t, q, z) *est une carte de* $G/G_{\xi_0} = O_{\xi_0}$ *autour de* ξ_0.

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du lemme 2.4. $\square$

Lemme 2.7.

(i) $$\nu_F^0(U) = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=i}^s b_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} , a_i, b_j \in \mathrm{C}^\infty(U) \right\} .$$

(ii) $$\nu_F^1(U) = \left\{ \sum_0^r a_i \frac{\partial}{\partial t_i} + b_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{j=i}^s c_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + d_j \frac{\partial}{\partial z_j} , \right.$$
$$\left. a_i, b_i, c_j, d_j \in \mathrm{C}^\infty(U) \,\middle|\, \frac{\partial b_i}{\partial t_k} = 0, \frac{\partial b_i}{\partial \bar{z}_l} = 0, \frac{\partial d_j}{\partial t_k} = 0, \frac{\partial d_j}{\partial \bar{z}_l} = 0 \right\} .$$

Démonstration.

(i) La démonstration de ce lemme est analogue à celle du cas réel donnée dans [12]. En effet pour simplifier la démonstration posons:

$$x_1 = t_1, ..., x_r = t_r , \quad x_{r+1} = \bar{z}_1, ..., x_{r+s} = \bar{z}_s ,$$

$$x_{r+s+1} = q_1, ..., x_{2r+s} = q_r , \quad x_{2r+s+1} = z_1, ..., x_{2r+2s} = z_s .$$

On a:

$$H_{q_i}=\sum_{j=1}^{r+s}\{q_i,x_j\}\frac{\partial}{\partial x_j}\,,\qquad H_{z_i}=\sum_{j=1}^{r+s}\{z_i,x_j\}\frac{\partial}{\partial x_j}\,,$$

car $\{x_i, x_j\}$ est nul pour i et j plus grand que $r+s$.

Sachant qu'en tout point ξ la matrice antisymetrique

$$(\{x_i,x_j\})_{1\leqslant i\leqslant 2r+2s,1\leqslant j\leqslant 2r+2s}$$

est inversible et que la matrice

$$(\{x_i,x_j\})_{r+s\leqslant i\leqslant 2r+2s,r+s\leqslant j\leqslant 2r+2s}$$

est nulle on déduit que F_ξ est engendré par les $(\partial/\partial x_j)(\xi)$ avec j plus petit que $r+s$.

(ii) Tout champ de vecteur X s'écrit sous la forme:

$$\sum_{i=1}^{r}a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+b_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{s}c_j\frac{\partial}{\partial \bar z_j}+d_j\frac{\partial}{\partial z_j}\,.$$

Pour qu'il soit dans $\nu^1_F(U)$ il faut que $[X, \partial/\partial t_k]$ et $[X, \partial/\partial \bar z_l]$ soient dans $\nu^0_F(U)$, et par suite il faut que:

$$\frac{\partial b_i}{\partial t_k}=0\,,\quad \frac{\partial b_i}{\partial \bar z_l}=0\,,\quad \frac{\partial d_j}{\partial t_k}=0\,,\quad \frac{\partial d_j}{\partial \bar z_l}=0\,.$$

Maintenant (i) implique que cette condition est suffisante. □

Vu les lemmes précédents et vu la forme de ω_0 on peut énoncer la proposition suivante:

Proposition 2.8. *(i)*

$$\mathscr{E}^0_F(U)=\{f\in C^\infty(U)\,|\,\partial f/\partial t_i=0\,,\ \forall 1\leqslant i\leqslant r,\ et\ \partial f/\partial \bar z_j=0,\ \forall 1\leqslant j\leqslant s\}\,.$$

Autrement dit les éléments de $\mathscr{E}^0_F(U)$ sont les fonctions C^∞ qui ne dépendent que de q et z.

(ii) Tout élément φ de $\mathscr{E}^1_F(U)$ s'écrit d'une façon unique sous la forme:

$$\varphi=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\tilde Z_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\frac{\partial F}{\partial z_j}+\beta_0=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i t_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\frac{\partial F}{\partial z_j}+\beta_0$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_0, ..., \beta_s$ dans $\mathscr{E}^0_F(U)$.

Démonstration. Remarquons tout simplement que l'unicité provient du fait que si on appelle (A^{ij}) l'inverse de la matrice $(\omega_0^{ij})=(\partial^2F/\partial z_i\,\partial\bar z_j)$ alors:

$$\alpha_i=\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\,,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant r\,,$$

$$\beta_j = 2i \sum_{k=1}^{s} \Lambda^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k}, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant s. \qquad \square$$

Soit $G_0 = \exp V_3 \cdot \exp V_2 \cdot \exp V_1$ un voisinage ouvert de 1 dans G comme dans la démonstration du lemme 2.5. Définissons le caractère local χ de D par:

$$\chi: \exp V_1 \to \mathbb{C}, \quad \chi(\exp X) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\langle \xi_0, X\rangle}.$$

Soit

$$E_1 = \{\varphi: G_0 \to \mathbb{C} \mid \varphi \in C^\infty \text{ et } \varphi(xh) = \chi(h^{-1})\varphi(x), \forall x \in G_0, \forall h \in \exp V_1 \mid xh \in G_0\}.$$

Notons

$$V_0 = G_0/D \simeq \exp V_3 \exp V_2 \cdot D.$$

Il est clair qu'à toute fonction $f: V_0 \to \mathbb{C}$ on peut associer un élément φ de E_1 en posant:

$$\varphi(\exp Z \exp Y \exp X) = \chi(\exp(-X)) f(\exp Z \exp Y \cdot D). \qquad (*)$$

Inversement si φ est dans E_1, il existe un unique $f: V_0 \to \mathbb{C}$ (qu'on notera dans la suite par $\tilde{\varphi}$) tel que $(*)$ soit vérifiée. Dans toute la suite on considère une carte de O_{ξ_0} comme dans le lemme 2.6. Soit:

$$E = \{\varphi \in E_1 \mid \partial\tilde{\varphi}/\partial \bar{z}'_k = 0, \forall 1 \leqslant k \leqslant s\}.$$

Définissons alors comme dans le cas réel la représentation locale ρ de G sur E par: Pour tout a, g de G_0 tels que $a^{-1}g$ soit dans G_0 et tout φ de E

$$(\rho(a)\varphi)(g) = \varphi(a^{-1}g).$$

Considérons alors sa différentielle $\mathrm{d}\rho$ définie par: $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall \varphi \in E$

$$(\mathrm{d}\rho(X)\varphi)(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(\exp(-tX)g)\big|_{t=0}.$$

Maintenant soit X un élément de $\mathfrak{d}$. Posons $Y = \mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{d})$. Alors:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\rho(Y)\varphi)(g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(\exp(-t\mathrm{Ad}(g)(X))g)\big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(\exp(\mathrm{Ad}(g)(-tX))g)\big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(g \cdot \exp(-tX) g^{-1} \cdot g)/_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(g \cdot \exp(-tX))\big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\langle \xi_0, X\rangle} \varphi(g))/_{t=0} = 2\mathrm{i}\pi\langle \xi_0, X\rangle \varphi(g) \\
&= 2\mathrm{i}\pi\langle \xi_0, \mathrm{Ad}(g^{-1})(Y)\rangle \varphi(g) = 2\mathrm{i}\pi\langle \xi, Y\rangle \varphi(g) \\
&= 2\mathrm{i}\pi \tilde{Y}(\xi)\varphi(g),
\end{aligned}$$

où $\xi = g\cdot\xi_0$. Mais d'après le lemme 2.3:

$$\tilde{Y}(\xi) = \beta_0(\Pi_1(\xi)) .$$

De plus, dans ce cas et toujours d'après le lemme 2.3, β_0 est une fonction en q' seulement.

D'autre part pour tout i dans $\{1, ..., r\}$ on a:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}\rho(Z_i)\varphi)\ (\exp X_3 \exp X_2 \exp X_1)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\exp(-tZ_i) \exp X_3 \exp X_2 \exp X_1)\,|_{t=0}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(\exp(-X_1))\tilde{\varphi}(\exp(-tZ_i) \exp X_3 \exp X_2\cdot D)\,|_{t=0}\\
&= \chi(\exp(-X_1))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\varphi}(\exp(-tZ_i) \exp X_3 \exp X_2\cdot D)\,|_{t=0}\\
&= \chi(\exp(-X_1))(Z_i^*\tilde{\varphi})(\exp X_3 \exp X_2\cdot D) .
\end{aligned}$$

Notons $\mathrm{Diff}_h^1(V_0)$ l'espace des opérateurs différentiells en $\partial/\partial q'_i$ et $\partial/\partial z'_i$ d'ordre au plus 1 et à coefficients holomorphes. Plus précisément un élément de $\mathrm{Diff}_h^1(V_0)$ est de la forme:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i(q',z')\frac{\partial}{\partial q'_i} + \sum_{j=1}^{s} b_i(q',z')\frac{\partial}{\partial z'_j} + b_0(q',z') .$$

Il n'est pas difficile de voir que $\mathrm{Diff}_h^1(V_0)$ est stable par la crochet de Lie. Définissons alors comme dans [12] l'application quantification:

$$\delta\colon \mathscr{E}_F^1(U)\to \mathrm{Diff}_h^1(V_0)$$

par

$$\delta(\varphi) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\mathrm{d}\rho(Z_i) + \sum_{j=1}^{s}\beta_j\frac{\partial}{\partial z_j} + \beta_0$$

si

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\tilde{Z}_i + \sum_{j=1}^{s}\beta_j\frac{\partial F}{\partial z_j} + \beta_0 .$$

Proposition 2.9. *δ est un isomorphisme d'algèbre de Lie.*

Démonstration. δ est surjective par construction, en effet il suffit de remarquer que les Z_i^* et les $\partial/\partial z'_j$ engendrent $\mathrm{Diff}\,_h^1(V_0)$. La fait que δ soit un homomorphisme d'algèbre de Lie se démontre d'une façon analogue à celle du cas réel. Ceci découle toujours du fait que $d\rho$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ (on peut par exemple trouver les calculs explicites dans [17]). Finalement si φ est un élément de $\mathscr{E}^1_F$ tel que $\delta(\varphi)=0$, alors

$$\alpha_i=0\,,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant r\,,\qquad \beta_j=0\,,\qquad \forall 0\leqslant j\leqslant s\,,$$

car en tout point $g\cdot D$, $\{Z_i^*(g\cdot D),\ (\partial/\partial z'_j)(g\cdot D)\}$ est une famille libre de $T_{g\cdot D}(G/D)$. □

Théorème 2.10. *Soit $O_{\xi_0}=G/G_{\xi_0}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$. Supposons qu'il existe une polarisation $\mathfrak{h}$ en ξ_0 telle que E soit un sous-groupe fermé de G. Alors il existe un recouvrement de O_{ξ_0} par des cartes $(U_\alpha, p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_r, z_1, ..., z_s)$ telle que la 2-forme s'écrive:*

$$\omega=\sum_{j=1}^{r} dp_j\wedge dq_j-\frac{1}{2i}\sum_{l,k=1}^{s}\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial z_l\,\partial\bar z_k}\,dz_l\wedge d\bar z_k$$

(où F_α est une fonction réelle sur U_α), et telle que pour tout X dans $\mathfrak{g}$, $\tilde X|_{U_\alpha}$ s'écrit sous la forme:

$$\tilde X|_{U_\alpha}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i p_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_j}+\beta_0\,,$$

où les α_i et les β_j sont des fonctions de q et z seulement.

Démonstration. Il suffit de construire une carte autour de ξ_0, et pour cela en considere une comme dans le lemme 2.6. Posons:

$$p_i=\delta^{-1}(\partial/\partial q'_1)\ .$$

Pour prouver le théorème en reprenant la méthode de [12] il suffit de vérifier que:

$$\{p_i, q_j\}=\delta_{ij}\,,\qquad \{p_i, z_k\}=0\ .$$

Remarquons que si f est une fonction sur U qui ne dépend que de q et z alors $\delta(f)=\tilde f\cdot$ où $\tilde f\cdot$ est l'opérateur différientiel d'ordre zéro sur V_0 à coéfficient $\tilde f$. On a alors:

$$\{p_i, q_j\}=\{\delta^{-1}(\partial/\partial q'_i)\ ,\delta^{-1}(q'_j\cdot)\}=\delta^{-1}([\partial/\partial q'_i\ , q'_j\cdot])=\delta_{ij}\,,$$

$$\{p_i, z_k\}=\delta^{-1}([\partial/\partial q'_i, z'_k\cdot])=0\ .$$ □

3. Produit-star sur les variétés kaehlériennes

Commençons ce paragraphe par une proposition de la théorie des déformations.

Proposition 3.1. *Soit $(V, +, m)$ une algèbre associative, et soient $D_1, ..., D_n, D'_1, ..., D'_n$ $2n$ dérivations de V linéairement indépendantes qui commutent entre elles.*

Pour k dans $\mathbb{N}^*$, *définissons l'opérateur* C_k *sur* $V \times V$ *par:*

$$C_k(u,v)=\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|+|\beta|=k}(-1)^{|\beta|}\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}D^\alpha D'^\beta(u)D^\beta D'^\alpha(v)$$

où $D=(D_1,\ldots,D_n)$, $D'=(D'_1,\ldots,D'_n)$ *et* α, β *sont des n-uplets. Alors* $(m+\sum_{k\geqslant 1}\nu^k C_k)$ *est une déformation formelle de m* [11].

Démonstration. Soit $D_1(V)$ la sous-algèbre associative des applications linéaires engendrée par Id_V, $D_1,\ldots,D_n$, $D'_1,\ldots,D'_n$. Cette sous-algèbre est commutative et par suite les formules du binôme de Newton s'appliquent. On note par $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ les éléments de $\mathbb{R}^{2n}$. Notons par $\mathrm{Diff}_{c,1}(\mathbb{R}^{2n})$ la sous-algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^{2n}$ a coéfficients constants. Puisque les D_i et D'_i commutent entre eux, il existe un unique homomorphisme surjectif d'algèbres associatives:

$$\Psi:\mathrm{Diff}_{c,1}(\mathbb{R}^{2n})\to D_1(V)\ ,$$

tel que

$$\Psi(\mathrm{Id}_{C^\infty(\mathbb{R}^{2n})})=\mathrm{Id}_V\ ,\qquad \Psi(\partial/\partial x_i)=D_i\ ,\qquad \Psi(\partial/\partial y_i)=D'_i\ .$$

Pour tout p dans $\mathbb{N}$ on note:

$$D_p(V)=D_1(V)\otimes\cdots\otimes D_1(V)\quad (p\text{ fois})$$

et

$$\mathrm{Diff}_{c,p}(\mathbb{R}^{2n})=\mathrm{Diff}_{c,1}(\mathbb{R}^{2n})\otimes\cdots\otimes\mathrm{Diff}_{c,1}(\mathbb{R}^{2n})\quad (p\text{ fois})\ .$$

On pose:

$$D(V)=\bigoplus_{p\in\mathbb{N}}D_p(V)\ ,\qquad \mathrm{Diff}_c(\mathbb{R}^{2n})=\bigoplus_{p\in\mathbb{N}}\mathrm{Diff}_{c,p}(\mathbb{R}^{2n})\ .$$

Ψ s'étend d'une façon naturelle et un homomorphisme:

$$\Psi:\mathrm{Diff}_c(\mathbb{R}^{2n})\to D(V)\ .$$

Maintenant si A_p est un élément de $\mathrm{Diff}_{c,p}(\mathbb{R}^{2n})$ et $M_1,\ldots,M_p$ sont des éléments respectifs de $\mathrm{Diff}_{c,a_1}(\mathbb{R}^{2n}),\ldots,\mathrm{Diff}_{c,a_p}(\mathbb{R}^{2n})$ $(p,a_1,\ldots,a_p\in\mathbb{N})$ alors:

$$\Psi(A_p(M_1(\ldots),\ldots,M_p(\ldots)))=\Psi(A_p)(\Psi(M_1)(\ldots),\ldots,\Psi(M_p)(\ldots))\ .\qquad (*)$$

Ψ s'étend par ν-linéarité en une application surjective:

$$\tilde{\Psi}:(\mathrm{Diff}_c(\mathbb{R}^{2n}))[[\nu]]\to(D(V))[[\nu]]\ ,$$

où $(D(V))[[\nu]]$ désigne l'espace des séries formelles en ν à coéfficients dans $D(V)$.

Il est clair que $m+\sum \nu^k C_k$ est l'image $\tilde{\Psi}$ du produit-star de Moyal sur $\mathbb{R}^{2n}$ [1]. Enfin d'après $(*)$, $m+\sum \nu^k C_k$ définit sur $V[[\nu]]$ une structure d'algèbre associative. □

Soit (M, ω_0) une variété kaehlérienne de dimension $2n$. Soit $(U, z_1, ..., z_n)$ une carte de M telle que la 2-forme ω_0 soit de la forme:

$$\omega_0 = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k,j} \frac{\partial^2 F}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k .$$

Soit (Λ^{ij}) la matrice inverse de la matrice $(\omega_0^{ij}) = (\partial^2 F/\partial z_i\, \partial \bar{z}_j)$. On a donc:

$$\{f, g\} = -2\mathrm{i} \sum_{j,k=1}^{n} \Lambda^{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_j} \right) .$$

Définissons les opérateurs différentiels d'ordre 1 suivants: $\forall j \in \{1, ..., n\}$

$$D_j(f) = \frac{\partial f}{\partial z_j} - \sum_{k,l=1}^{n} \Lambda^{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial z_j\, \partial z_l} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$$

et

$$D'_j(f) = (-2\mathrm{i}) \sum_{k=1}^{n} \Lambda^{kj} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} .$$

Lemme 3.2.
(i) Les D_j et D'_k commutent entre eux.
(ii) $\forall f, g \in C^\infty(U)$ on a:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{n} (D_k(f) \cdot D'_k(g) - D_k(g) \cdot D'_k(f)) .$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est purement calculatoire. □

Remarquons que si f est holomorphe alors:

$$D'_j(f) = 0 , \quad \forall j \in \{1, ..., n\} ,$$

et réciproquement. De plus si $f = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \cdot \partial F/\partial z_l$ où les α_l sont des fonctions holomorphes, alors:

$$D'_j(f) = (-2\mathrm{i}) \sum_{l,k=1}^{n} \alpha_l \Lambda^{kj} \frac{\partial^2 F}{\partial z_l\, \partial \bar{z}_k} = (-2\mathrm{i}) \alpha_j .$$

Pour k dans $\mathbb{N}^*$, notons C_k l'opérateur différentiel sur U construit à partir des D_j et D'_j comme dans la proposition 3.1. Alors la proposition suivante découle facilement des remarques qu'on vient de faire.

Proposition 3.3. *(i)*

$$M=m+\sum_{k\geq 1}\nu^k C_k$$

est un produit-star sur U.

(ii) Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur U alors:

$$M(f,g)=f\cdot g .$$

(iii) Si

$$f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{\partial F}{\partial z_k}+\alpha_0 ,\qquad g=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\frac{\partial F}{\partial z_k}+\beta_0$$

sont deux fonctions sur U telles que α, α_1, ..., α_k, β_0, β_1, ..., β_k *soient holomorphes alors:*

$$M(f,g)=f\cdot g+\nu\{f,g\}+\tfrac{1}{2}\nu^2 h ,$$

où h est une fonction holomorphe.

4. Existence de produits-star covariants

Soit O_{ξ_0} une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation en ξ_0 telle que E soit fermé. Considérons un recouvrement (U_α) de O_{ξ_0} par des cartes comme dans le théorème 2.10. Dans la suite on suppose que ce recouvrement est contractile. On note toujours par $C_{k,\alpha}$ l'opérateur différentiel sur U_α construit à partir de $\partial/\partial q_1$, ..., $\partial/\partial q_r$, D_1, ..., D_s, D'_1, ..., D'_s, $\partial/\partial p_1$, ..., $\partial/\partial p_r$. Alors vu la proposition 3.3 on a:

Proposition 4.1.

$$M_\alpha=m+\sum_{k\geq 1}\nu^k C_{k,\alpha}$$

est un produit-star sur U_α *vérifiant*:

(i) $\forall f, g\in \mathscr{E}^0_F(U_\alpha)$

$$M_\alpha(f,g)=f\cdot g ;$$

(ii) $\forall f, g\in \mathscr{E}^1_F(U_\alpha)$

$$M_\alpha(f,g)=f\cdot g+\nu\{f,g\}+\tfrac{1}{2}\nu^2 h ,$$

avec h dans $\mathscr{E}^0_F(U_\alpha)$.

Théorème 4.2. *Soit* O_{ξ_0} *une orbite de G dans* $\mathfrak{g}^*$ *admettant une polarisation en* ξ_0 *telle que E soit fermé, alors il existe un produit-star covariant sur* O_{ξ_0}.

Démonstration. Vu les outils qu'on a introduit, la démonstration de ce théorème est maintenant tout à fait analogue à celle du cas réel donnée dans [7]. En effet, soit $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement contractile localement fini de O_{ξ_0} comme dans le théorème 2.10 et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons que sur chaque U_α il existe un produit-star $\star_\alpha = \sum \nu^r C_{r,\alpha}$ tel que

(i) $\forall \alpha, \beta \in A$

$$C_{r,\alpha} = C_{r,\beta} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta\,, \quad \forall r < 2k\,;$$

(ii) $\forall r \in \mathbb{N}$

$$C_{2r+1}(\mathscr{E}^1(U_\alpha), \mathscr{E}^1(U_\alpha)) = 0\,,$$

$$C_{2r}(\mathscr{E}^1(U_\alpha), \mathscr{E}^0(U_\alpha)) = 0\,,$$

$$C_{2r}(\mathscr{E}^1(U_\alpha), \mathscr{E}^1(U_\alpha)) \subset \mathscr{E}^0(U_\alpha)\,.$$

Nous savons [7] que pour tout α, β dans A il existe un opérateur différentiel $H_{\alpha\beta}$ sur $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ tel que, avec les notations de [6]:

$$\delta H_{\alpha\beta} = C_{2k,\alpha} - C_{2k,\beta}\,,$$

$$\partial H_{\alpha\beta} = C_{2k+1,\alpha} - C_{2k+1,\beta}\,.$$

On a donc

$$\delta H_{\alpha\beta}(u, v) = H_{\alpha\beta}(uv) - uH_{\alpha\beta}(v) - vH_{\alpha\beta}(u) = 0\,,$$

$$\forall u \in \mathscr{E}^1(U_{\alpha\beta}),\ v \in \mathscr{E}^0(U_{\alpha\beta})\,, \tag{$*$}$$

$$\partial H_{\alpha\beta}(u, v) = H_{\alpha\beta}(\{u, v\}) - \{u, H_{\alpha\beta}(v)\} - \{H_{\alpha\beta}(u), v\} = 0\,,$$

$$\forall u, v \in \mathscr{E}^1(U_{\alpha\beta})\,, \tag{$**$}$$

$$\delta H_{\alpha\beta}(\mathscr{E}^1(U_{\alpha\beta}), \mathscr{E}^1(U_{\alpha\beta})) \subset \mathscr{E}^0(U_{\alpha\beta})\,. \tag{$***$}$$

De $(*)$ et $(**)$ on déduit que, quitte à retrancher de $H_{\alpha\beta}$ les termes où on ne dérive pas rapport à p_i et $\bar{z}_i$, on peut supposer que $H_{\alpha\beta}$ est nul sur $\mathscr{E}^0(U_{\alpha\beta})$. Il envoie alors $\mathscr{E}^1(U_{\alpha\beta})$ dans $\mathscr{E}^0(U_{\alpha\beta})$. Posons:

$$H_{\alpha\beta}(\partial F_\alpha/\partial z_k) = (-2\mathrm{i})u_k\,, \quad H_{\alpha\beta}(p_j) = v_j\,, \qquad (1 \leqslant k \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r)\,,$$

et considérons la 1-forme θ:

$$\theta = \sum_{j=1}^{s} u_j\, \mathrm{d}z_j + \sum_{j=1}^{r} v_j\, \mathrm{d}q_j\,.$$

Puisque les u_j et les v_j sont dans $\mathscr{E}^0(U_{\alpha\beta})$,

$$\mathrm{d}\theta = \sum_{j,l=1}^{s} \frac{\partial u_j}{\partial z_l}\, \mathrm{d}z_l \wedge \mathrm{d}z_j + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial u_j}{\partial q_l}\, \mathrm{d}q_l \wedge \mathrm{d}z_j$$

$$+ \sum_{j,l=1}^{r} \frac{\partial v_j}{\partial q_l}\, \mathrm{d}q_l \wedge \mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial v_j}{\partial z_l}\, \mathrm{d}z_l \wedge \mathrm{d}q_j\,.$$

Mais d'après (**) on a:

$$H_{\alpha\beta}(\{\partial F_\alpha/\partial z_j, \partial F_\alpha/\partial z_l\}) = (-2\mathrm{i})(\{u_j, \partial F_\alpha/\partial z_l\} + \{\partial F_\alpha/\partial z_j, u_l\})$$
$$= (-2\mathrm{i})^2(\partial u_j/\partial z_l - \partial u_l/\partial z_j) = 0 ,$$
$$H_{\alpha\beta}(\{\partial F_\alpha/\partial z_j, p_l\}) = (-2\mathrm{i})\{u_j, p_l\} + \{\partial F_\alpha/\partial z_j, v_i\}$$
$$= (-2\mathrm{i})(-\partial u_j/\partial q_l + \partial v_l/\partial z_j) = 0 ,$$
$$H_{\alpha\beta}(\{p_j, p_l\}) = \{v_j, p_l\} + \{p_j, v_l\} = -\partial v_j/\partial q_l + \partial v_l/\partial q_j = 0 ,$$

et par suite $d\theta = 0$. Puisque $U_{\alpha\beta}$ est contractile il existe une fonction $\varphi_{\alpha\beta}$ telle que:

$$\theta = d\varphi_{\alpha\beta} .$$

Il en résulte donc que $\varphi_{\alpha\beta}$ est dans $\mathscr{E}^0(U_{\alpha\beta})$ et que:

$$H_{\alpha\beta}(\partial F_\alpha/\partial z_j) = \{\varphi_{\alpha\beta}, \partial F_\alpha/\partial z_j\} , \quad H_{\alpha\beta}(p_l) = \{\varphi_{\alpha\beta}, p_l\} .$$

Donc, quitte à corriger $H_{\alpha\beta}$ par $\partial\varphi_{\alpha\beta}$ ($\partial\varphi_{\alpha\beta}(u) = \{\varphi_{\alpha\beta}, u\}$), on peut supposer que $H_{\alpha\beta}$ est nul sur $\mathscr{E}^1(U_{\alpha\beta})$. Maintenant avec ce choix pour tout α, β, γ dans A, $H_{\alpha\beta\gamma}(=H_{\alpha\beta} + H_{\beta\gamma} + H_{\gamma\alpha})$ est un champ de vecteur hamiltonien nul sur $\mathscr{E}^1_F(U_{\alpha\beta\gamma})$ et par suite il est nul. On peut donc, en considérant une partition de l'unité $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$, construire les opérateurs différientiels K_α sur U_α par:

$$K_\alpha = \sum_\beta H_{\alpha\beta}\psi_\beta .$$

Considérons alors le nouveau produit-star $\star'_\alpha$ sur U_α défini par:

$$u \star'_\alpha v = \exp(\nu^{2k}K_\alpha)(\exp(-\nu^{2k}K_\alpha u) \star_\alpha \exp(-\nu^{2k}K_\alpha v)) .$$

Ces produit-stars vérifient les hypothèses de la récurrence à l'ordre $k+1$. □

Bibliographie

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer, Deformation and quantization, Ann. Phys. 111 (1978) 61–151.

[2] C. Fronsdal, Remarks about quantization, Rep. Math. Phys. 15 (1978) 1.

[3] D. Arnal et J.C. Cortet, *-Products in the method of orbits for nilpotent groups, J. Geom. Phys. 2(2) (1985) 83.

[4] D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt, Representation of compact Lie groups and quantisation by deformation, Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sci. LXXIV 45 (1988) 123–141.

[5] B. Cahen, Star représentations induites, Thèse Université De Metz.

[6] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte, Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectique manifold and star-products, existence, equivalence, derivations, in: NATO ASI Series C, Vol. 247 (1988) p. 897–960.

[7] M. Masmoudi, Covariant star-products, Ann. Fac. Toulouse, à paraître.

[8] L. Pukanszky, On a property of the quantization map for the coadjoint orbits of connected Lie groups, Progr. Math. 82.

[9] D. Duval, J. Elhadad et M. Tuynman, Pukanszky's condition and symplectic induction, J. Diff. Geom.

[10] D. Arnal, J.C. Cortet, P. Molin et G. Pinczon, Covariance and geometrical invariance in ⋆ quantization, J. Math. Phys. 24(2) (1983) 276–283.

[11] M. Gerstenhaber, On the deformations of rings and algebras, Ann. Math. 79 (1964) 59–103.

[12] N.V. Pedersen, On the symplectique structure of coadjoint orbits of (solvable) Lie groups and applications I, Math. Ann. (1988) 633–669.

[13] M. Vergne, *Polarisations, Représentations des groupes de Lie résolubles,* Mono de la Soc. Math. de France No. 4 (Dunod, Paris, 1972).

[14] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces.*

[15] S. Kobayashi and K. Nobizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. II.

[16] A. Lichnerowicz, Variétés de Poisson et feuilletages, Ann. Fac. Toulouse (1982) 195–262.

[17] M. Masmoudi, Produits-star sur les variétés de Poisson, Thèse Université de Metz.

[18] D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt, Déformations on coadjoint orbits, J. Geom. Phys. 3 (1986) 327.

[19] R. Berger, Déformations graduées et algèbres de Hopf, préprint Université de St. Etienne.